OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 4/2005 (34)

O Sudoku trochu inak

Marián Trenkler

Abstract: The mathematical brain-twister SUDOKU (Number Place in the U.S.) has recently gained great popularity. We point out a relationship between SUDOKU and 4-dimensional Latin cubes. Namely, we assign the cells 4-tuples of numbers – coordinates in 4-dimensional space and then consider the game plan as a 4-dimensional cube. We also mention some variants of SUDOKU.

Nedávno sa stala na Slovensku populárnou hra SUDOKU, ktorá vznikla asi pred tridsiatimi rokmi v USA. Názov tejto hry – číselného hlavolamu – je odvodený z japonských slov SU (číslo) a DOKU (slobodný) a v Japonsku sa hra stala obľúbenou v roku 1986. V Európe bola SUDOKU predstavená v novembri 2004 v známom britskom denníku The Times. Keďže znaky čísel sú rovnaké v mnohých jazykoch, hra sa rýchlo rozšírila a stala populárnou aj v ďalších krajinách. Poznamenajme, že v amerických časopisoch pre hádankárov sa SUDOKU nazýva *Number Place*. Mnoho informácií môže nájsť čitateľ na Internete (napr. [5, 6].

Hracím poľom (alebo *hracím plánom*) SUDOKU je štvorcová tabuľka pozostávajúca z 9×9 štvorčekov (v práci ich nazývame *políčka*), ktoré sú rozdelené do deviatich zhodných štvorcových tabuliek (*blokov*) pozostávajúcich z 3×3 políčok. V niektorých políčkach sú vpísané prirodzené čísla od 1 do 9. Zvyčajne sú čísla vpísané do políčok, ktoré sú súmerné podľa stredu hracieho plánu. (Pozri Obr. 1.) Cieľom hry je doplniť do každého prázdneho políčka číslo tak, aby v každom riadku, v každom stĺpci a aj v každom bloku boli všetky čísla z množiny $\{1,2,3,\dots,9\}$. Kvôli tomu, aby niektoré vzťahy boli jednoduchšie, budeme v nasledujúcom texte namiesto čísel $\{1,2,3,\dots,9\}$ vpisovať do políčok čísla z množiny $M = \{0,1,2,\dots,8\}$.

Ak sa pozrieme na hru SUDOKU očami matematika, môžeme sformulovať rôzne otázky. Bolo už publikovaných viacero matematických prác, ktoré sa zaoberajú odpoveďami na otázky súvisiace s riešením hry. Sú to otázky typu: Pre akú východziu konfiguráciu čísel má úloha jednoznačné riešenie? Koľko riešení má úloha? Aká je časová zložitosť algoritmu, ktorý hru rieši? V tejto práci sa však budeme zaoberať inou stránkou hry. Jednotlivé políčka označíme štvoricou čísel – súradníc a hrací plán budeme reprezentovať štvorrozmernou kockou (niekedy nazývanou aj *hyperkocka*). Cieľom príspevku je poukázať na niektoré súvislosti medzi hrou SUDOKU, latinskými štvorcami a ich analógiou v 4-rozmernom priestore. Čitateľ sa môže oboznámiť so 4-rozmernými latinskými kockami (latinskými hyperkockami), ktoré matematici skúmajú so stále väčším záujmom. Práca je teda malou exkurziou do 4-rozmerného priestoru a môže byť zdrojom námetov pre odbornú prácu učiteľov aj žiakov. Pozorný čitateľ môže sformulovať rôzne variácie tejto populárnej hry. Modifikácie môžu byť prispôsobené veku a schopnostiam riešiteľa.

Na Obrázku 1 je jedno zadanie hry SUDOKU (vpísané čísla sú z M) a na Obrázku 2 jeho riešenie, vyjadrené v trojkovej sústave. V každom riadku, stĺpci aj bloku sa nachádza práve raz každá z usporiadaných dvojíc $[i, j], 0 \leq i, j \leq 2$. (Na dvojciferné číslo v trojkovej sústave sa tu dívame ako na usporiadanú dvojicu číslic.) Odporúčame, aby si čitateľ rozdelil riešenie hry do dvoch tabuliek – v prvej by boli prvé číslice a v druhej druhé číslice trojkových čísel. V oboch tabuľkách sa v každom riadku, stĺpci a bloku bude nachádzať každé z čísel $0, 1, 2$ práve trikrát. Čitateľovi to môže poskytnúť nový pohľad na hru SUDOKU a v niektorých prípadoch aj pomôcť pri hľadaní riešenia.

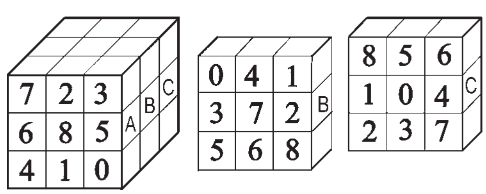
4			6	7				0
	8	0					3	
6		7			3	1		2
			7		5	3		
8	3			0			2	7
		2	1		8			
3		8	2			6		5
	1					4	0	
7				6	4			1

Obrázok 1

11	02	10	20	21	01	22	12	00
01	22	00	12	11	02	21	10	20
20	12	21	00	22	10	01	11	02
00	20	11	21	02	12	10	01	22
22	10	01	11	00	20	12	02	21
12	21	02	01	10	22	00	20	11
10	11	22	02	01	00	20	21	12
02	01	20	22	12	21	11	00	10
21	00	12	10	20	11	02	22	01

Obrázok 2

Pretože väčšina čitateľov sa doposiaľ pravdepodobne nestretla s pojmom hyperkocka (4-rozmerná kocka), pre získanie určitej predstavy najskôr uvedieme trojrozmernú verziu hry. Na Obrázku 3 je nakreslená kocka pozostávajúca z $3 \times 3 \times 3$ políčok, pričom písmená A, B, C označujú tri z jej deviatich vrstiev. Každá vrstva sa skladá z deviatich políčok. Ďalšie dve trojice vrstiev dostaneme, ak kocku „rozrežeme“ dvoma rovinami rovnobežnými s podstavou, resp. bočnou stenou kocky.



Obrázok 3

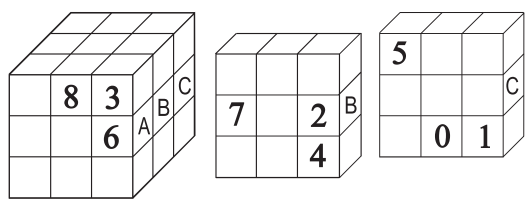
V políčkach sú napísané čísla z množiny $M = \{0,1,2,\ldots,8\}$ tak, že čísla v každej vrstve sú navzájom rôzne.

Priraďme prirodzeným spôsobom každému políčku trojicu súradníc, ako na Obrázku 4. (Na obrázku sú vynechané čiarky medzi súradnicami.) *Vrstvou* nazývame deväticu políčok, ktoré majú rovnakú súradnicu na jednej pozícii. Každá vrstva je jednoznačne určená ľubovoľným jej prvkom a dvoma z troch smerov, ktoré sú určené hranami kocky.

$a(111)$	$a(112)$	$a(113)$	$a(211)$	$a(212)$	$a(213)$	$a(311)$	$a(312)$	$a(313)$
$a(121)$	$a(122)$	$a(123)$	$a(221)$	$a(222)$	$a(223)$	$a(321)$	$a(322)$	$a(323)$
$a(131)$	$a(132)$	$a(133)$	$a(231)$	$a(232)$	$a(233)$	$a(331)$	$a(332)$	$a(333)$

Obrázok 4

Úloha: Na Obrázku 5 je nakreslená kocka, v ktorej sú čísla vpísané len v jednej tretine políčok. Do každého prázdneho políčka doplňte číslo z množiny $M = \{0,1,2,\ldots,8\}$ tak, aby v každej vrstve bolo každé práve raz.



Obrázok 5

Po tomto výlete do trojrozmerného priestoru sa vráťme k hre SUDOKU.

Tabuľka, ktorá je hracím poľom SUDOKU a je vyplnená tak, že v každom riadku a každom stĺpci je permutácia množiny M, je v matematike známa ako latinský štvorec stupňa 9. (*Latinský štvorec* stupňa n je štvorcová matica $\mathbf{R}_n = |r(k,l);\ 1 \leq k,l \leq n|$ stupňa n, pozostávajúca z n^2 čísel $r(k,l) \in \{0,1,2,\ldots,n-1\}$, pričom každý riadok a každý stĺpec je permutácou množiny $\{0,1,\ldots,n-1\}$.) V hre SUDOKU pravidlá navyše požadujú, aby aj v každom bloku bolo každé číslo z množiny M práve raz.

Každému políčku hracieho plánu priradíme štvoricu čísel - súradnice tak, ako je to na Obrázku 6. Prvá dvojica súradníc určuje blok a druhá dvojica pozíciu v rámci bloku.

Hyperkocka stupňa n je 4-rozmerná matica (tabuľka)

$$\mathbf{A}_n = |a(i,j,k,l);\ 1 \leq i,j,k,l \leq n|$$

skladajúca sa z n^4 prvkov (políčok) $a(i,j,k,l)$.

$a(1111)$	$a(1112)$	$a(1113)$	$a(1211)$	$a(1212)$	$a(1213)$	$a(1311)$	$a(1312)$	$a(1313)$
$a(1121)$	$a(1122)$	$a(1123)$	$a(1221)$	$a(1222)$	$a(1223)$	$a(1321)$	$a(1322)$	$a(1323)$
$a(1131)$	$a(1132)$	$a(1133)$	$a(1231)$	$a(1232)$	$a(1233)$	$a(1331)$	$a(1332)$	$a(1333)$
$a(2111)$	$a(2112)$	$a(2113)$	$a(2211)$	$a(2212)$	$a(2213)$	$a(2311)$	$a(2312)$	$a(2313)$
$a(2121)$	$a(2122)$	$a(2123)$	$a(2221)$	$a(2222)$	$a(2223)$	$a(2321)$	$a(2322)$	$a(2323)$
$a(2131)$	$a(2132)$	$a(2133)$	$a(2231)$	$a(2232)$	$a(2233)$	$a(2331)$	$a(2332)$	$a(2333)$
$a(3111)$	$a(3112)$	$a(3113)$	$a(3211)$	$a(3212)$	$a(3213)$	$a(3311)$	$a(3312)$	$a(3313)$
$a(3121)$	$a(3122)$	$a(3123)$	$a(3221)$	$a(3222)$	$a(3223)$	$a(3321)$	$a(3322)$	$a(3323)$
$a(3131)$	$a(3132)$	$a(3133)$	$a(3231)$	$a(3232)$	$a(3233)$	$a(3331)$	$a(3332)$	$a(3333)$

Obrázok 6

Riadkom hyperkocky $\mathbf{A}_n$ stupňa n rozumieme n-ticu prvkov, ktorých súradnice sa líšia práve na jednej pozícii. *Vrstvou* hyperkocky rozumieme n^2-ticu prvkov, ktorých súradnice sa líšia práve na dvoch pozíciách. Vrstva je jednoznačne určená jedným prvkom a dvoma smermi. *Smery* v hyperkocke sú štyri a sú určené jej hranami. Dvojice jednotlivých smerov určujú šesť *zameraní*. (Poznámka: Pojmy *smer* a *zameranie* používame v podobnom význame ako v analytickej geometrii. V geometrii smer (zameranie) označuje jednorozmerný (dvojrozmerný) vektorový priestor a spolu s jedným bodom určuje priamku (rovinu.)) Každý smer sa podieľa na určení troch zameraní. Dve vrstvy hyperkocky majú rovnaké zameranie práve vtedy, keď sú disjunktné. Hyperkocka stupňa n má práve $6n^2$ vrstiev patriacich do šiestich zameraní.

Vráťme sa k tabuľke na Obrázku 6. Teraz už vieme povedať, že sú na ňom súradnice jednotlivých políčok hyperkocky stupňa 3. Bloky 3×3, ktoré sú ohraničené hrubými čiarami, znázorňujú 9 vrstiev tejto hyperkocky rovnakého zamerania. Napríklad prvok $a(1,1,1,1)$ sa nachádza v štyroch riadkoch pozostávajúcich z trojíc prvkov:

$$\begin{array}{ll} \text{1-smer:} & (a(1,1,1,1), a(1,1,1,2), a(1,1,1,3)), \\ \text{2-smer:} & (a(1,1,1,1), a(1,1,2,1), a(1,1,3,1)), \\ \text{3-smer:} & (a(1,1,1,1), a(1,2,1,1), a(1,3,1,1)), \\ \text{4-smer:} & (a(1,1,1,1), a(2,1,1,1), a(3,1,1,1)). \end{array}$$

Tieto riadky patria do štyroch navzájom rôznych smerov, ktoré postupne označíme číslami 1 až 4. Šesť vrstiev hyperkocky stupňa 3, ktoré majú navzájom rôzne zamerania a obsahujú prvok $a(1,1,1,1)$ je určených štvoricami rohových políčok (symbolom *(x-y)-zameranie* označíme zameranie, ktoré je určené smermi x a y):

$$\begin{array}{ll} \text{(1-2)-zameranie:} & a(1,1,1,1),\ a(1,1,1,3),\ a(1,1,3,1),\ a(1,1,3,3), \\ \text{(1-3)-zameranie:} & a(1,1,1,1),\ a(1,1,1,3),\ a(1,3,1,1),\ a(1,3,1,3), \end{array}$$

(1-4)-zameranie: $a(1,1,1,1),\ a(1,1,1,3),\ a(3,1,1,1),\ a(3,1,1,3),$
(2-3)-zameranie: $a(1,1,1,1),\ a(1,1,3,1),\ a(1,3,1,1),\ a(1,3,3,1),$
(2-4)-zameranie: $a(1,1,1,1),\ a(1,1,3,1),\ a(3,1,1,1),\ a(3,1,3,1),$
(3-4)-zameranie: $a(1,1,1,1),\ a(1,3,1,1),\ a(3,1,1,1),\ a(3,3,1,1).$

Použitím tejto terminológie môžeme pravidlá hry SUDOKU sformulovať nasledujúcim spôsobom: V hyperkocke stupňa 3 sú v niektorých políčkach vpísané čísla z množiny M. Doplňte do každého prázdneho políčka číslo tak, aby v každej vrstve so zameraním (1-2), (1-3) a (2-4) sa nachádzali všetky čísla z M.

Ak by sme požadovali, aby sa vo všetkých vrstvách určených inou kombináciou zameraní nachádzali všetky čísla z M, dostali by sme aj iné verzie hry SUDOKU.

V ďalšej časti ukážeme, ako vyplniť takúto tabuľku v istom špeciálnom prípade. Najskôr však definujeme dva pojmy: ortogonálne latinské štvorce a latinská hyperkocka.

Dva latinské štvorce $\mathbf{R}_n = |r(k,l)|$ a $\mathbf{S}_n = |s(k,l)|$ stupňa n nazývame *ortogonálne,* ak všetky usporiadané dvojice $[r(k,l), s(k,l)]$ sú navzájom rôzne. Už od čias Leonharda Eulera je známe, že pre všetky nepárne n je možné vytvoriť dvojice ortogonálnych latinských štvorcov použitím vzťahov

$$(1) \qquad r(k,l) = (k+l+a) \mod n, \qquad s(k,l) = (k-l+b) \mod n$$

pre všetky $1 \le k,l \le n$, pričom a,b sú ľubovoľné celé čísla. Prvkami tabuľky na Obrázku 7 sú dvojice $[r(k,l), s(k,l)]$ prvkov ortogonálnych latinských štvorcov $\mathbf{R}_9$ a $\mathbf{S}_9$ stupňa 9, zostrojených týmito vzťahmi, pre $a = b = 0$.

2,0	3,8	4,7	5,6	6,5	7,4	8,3	0,2	1,1
3,1	4,0	5,8	6,7	7,6	8,5	0,4	1,3	2,2
4,2	5,1	6,0	7,8	8,7	0,6	1,5	2,4	3,3
5,3	6,2	7,1	8,0	0,8	1,7	2,6	3,5	4,4
6,4	7,3	8,2	0,1	1,0	2,8	3,7	4,6	5,5
7,5	8,4	0,3	1,2	2,1	3,0	4,8	5,7	6,6
8,6	0,5	1,4	2,3	3,2	4,1	5,0	6,8	7,7
0,7	1,6	2,5	3,4	4,3	5,2	9,1	7,0	8,8
1,8	2,7	3,6	4,5	5,4	6,3	7,2	8,1	0,0

Obrázok 7

Už pred 300 rokmi bolo francúzovi De la Hire známe, že z dvojice vhodných ortogonálnych latinských štvorcov je možné vytvoriť magický štvorec. (*Magický štvorec* stupňa n je štvorcová matica $\mathbf{M}_n = |m(k,l);\ 1 \le k,l \le n|$ stupňa n, pozostávajúca z n^2 po sebe idúcich prirodzených čísel $m(k,l)$, pričom platí, že súčet čísel v každom riadku, každom stĺpci a oboch diagonálach matice je rovnaký.) Ak zvolíme $a = 3$ a $b = 4$, tak použitím vzťahu

$$m(k,l) = 9 \cdot r(k,l) + s(k,l) + 1$$

dostaneme magický štvorec $\mathbf{M}_9 = |m(k,l); 1 \le k,l \le 9|$ stupňa 9, ktorého prvky sú čísla $\{0,1,2,\ldots,n^2-1\}$. Parametre a,b sú zvolené tak, aby nielen súčty čísel v riadkoch a stĺpcoch, ale aj súčty čísel na diagonálach boli rovnaké.

Zovšeobecnením latinského štvorca v 4-rozmernom priestore je latinská hyperkocka. *Latinská hyperkocka* stupňa n je hyperkocka

$$\mathbf{T}_n = |t(i,j,k,l);\ 1 \le i,j,k,l \le n|,$$

ktorej prvky sú čísla z množiny $\{0,1,2,\ldots,n-1\}$, pričom v každom riadku je permutácia týchto čísel.

Všimnime si dve latinské hyperkocky $\mathbf{T}_n = |t(i,j,k,l)|$ a $\mathbf{U}_n = |u(i,j,k,l)|$ stupňa n, ktoré sú definované vzťahmi

$$\begin{aligned} t(i,j,k,l) &= r(i,(r(j,r(k,l))) = (i+j+k+l) \mod n, \\ u(i,j,k,l) &= s(i,(s(j,s(k,l))) = (i-j+k-l) \mod n; \end{aligned}$$

pričom $\mathbf{R}_n$ a $\mathbf{S}_n$ je dvojica ortogonálnych latinských štvorcov definovaná vzťahmi (1). Tabuľka na Obrázku 8, ktorá spĺňa podmienky hry SUDOKU, je vytvorená použitím vzťahu

$$v(i,j,k,l) = t(i,j,k,l) \cdot n + u(i,j,k,l). \tag{2}$$

Pozorný čitateľ si môže všimnúť, že všetky prvky z množiny M sa nachádzajú nie len vo všetkých vrstvách troch zameraní, ale vo vrstvách štyroch zameraní. Je to vďaka vhodnej voľbe dvojice latinských hyperkociek. Ak si zvolíme inú východziu dvojicu latinských štvorcov (napr. inou voľbou parametrov a,b), tak dostaneme iné latinské hyperkocky stupňa n a z nich iné vyplnenie hyperkocky – hracieho plánu. Z konštrukcie založenej na vzťahu (2) dokonca vyplýva, že aj súčet čísel vo všetkých riadkoch hyperkocky je rovnaký pre všetky voľby parametrov a,b. Vhodnými zámenami riadkov a stĺpcov získame aj iné tabuľky (riešenia hry). (Viac podrobností o latinských štvorcoch a hyperkockách je uvedených v [1, 3, 4].)

Obsah vyššie uvedeného textu ponúka čitateľovi viac otázok ako odpovedí. Pretože uvedené vzorce pre latinské štvorce a hyperkocky platia pre všetky nepárne hodnoty parametra n, môže sa čitateľ zamyslieť aj nad hracími plánmi iných rozmerov.

3	1	8	7	5	0	2	6	4
7	5	0	2	6	4	3	1	8
2	6	4	3	1	8	7	5	0
1	8	3	5	0	7	6	4	2
5	0	7	6	4	2	1	8	3
6	4	2	1	8	3	5	0	7
8	3	1	0	7	5	4	2	6
0	7	5	4	2	6	8	3	1
4	2	6	8	3	1	0	7	5

Obrázok 8

Čitateľ si môže vymyslieť rôzne variácie hry SUDOKU. Inšpiráciou mu môžu byť nasledujúce poznámky:

1. Predpokladajme, že v hyperkocke stupňa 3 sú vyplnené niektoré políčka číslami $0,1,2$. Cieľom hry je doplnenie čísel do hyperkocky tak, aby v každom riadku bolo každé z týchto čísel práve raz. Riešením hry je latinská hyperkocka stupňa 3. (Konštrukcia takýchto hyperkociek je uvedená v [4].)

2. Namiesto tabuľky rozmerov 9×9 môžeme upraviť hru pre tabuľku $m^2 \times m^2$ pozostávajúcu z m^2 blokov, ktoré majú $m \times m$ políčok. V niektorých políčkach sú vpísané čísla z množiny $N = \{1, 2, 3, \ldots, m^2\}$. Cieľom hry je doplniť chýbajúce čísla tak, aby v každom riadku, stĺpci a bloku sa nachádzalo každé číslo z množiny N práve raz. (Vyššie uvedené vzťahy (1) a (2) sú použiteľné pre všetky nepárne n.) Skúsenosti potvrdili, že pre deti mladšieho školského veku je zaujímavá verzia s parametrom $m = 2$.

3. Iné verzie hry dostaneme, ak vynecháme požiadavku, aby bloky mali tvar štvorca. Tabuľka na Obrázku 9 je vytvorená zo 6×6 políčok, pričom blokmi sú obdĺžniky z 3×2 políčok.

5	4	3	2	6	1
2	1	6	5	3	4
4	3	5	1	2	6
1	6	2	4	5	3
6	2	1	3	4	5
3	5	4	6	1	2

Obrázok 9

L i t e r a t ú r a

[1] Bosák, J.: *Latinské štvorce* Škola mladých matematikov 38, Praha 1976.

[2] Havlíček, K.: *Prostory o čtyřech a více rozměrech* Škola mladých matematikov 12, Praha 1965.

[3] Trenkler, M.: *Konštrukcia p-rozmerných magických kociek,* Obzory matematiky, fyziky a informatiky **84** (2000), 1–11.

[4] Trenkler, M.: *Orthogonal Latin p-dimensional cubes,* Czechoslovak Mathematical Journal **55** (2005), 725–728.

[5] `http://www.sudoku.com`

[6] `http://en.wikipedia.org/wiki/Sudoku`

Adresa autora:

Marián Trenkler, Pedagogická fakulta Katolíckej Univerzity v Ružomberku, Nám. A. Hlinku 56, 034 01 Ružomberok
e-mail: `trenkler@fedu.ku.sk`